5/11/19

29/11/19 αναπλήρωση
(Παρασκευή)
9.00 - 12.00

Κεφάλαιο 2 : Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

§1 : Περιοδικές συναρτήσεις

• ΟΡΙΣΜΟΣ : Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.
Η f λέγεται περιοδική, αν-ν, $\exists\, T \neq 0$:
$$f(x+T) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
Ένας τέτοιος αριθμός λέγεται περίοδος

ΠΑΡΑΔ. :
• $\sin x$, $T = 2\pi$
• $e^{i \cdot 2\pi x}$ $T = 1$
γιατί:
$$e^{i \cdot 2\pi \cdot (x+1)} = e^{i \cdot 2\pi x} \cdot \underbrace{e^{i \cdot 2\pi}}_{\cos 2\pi + i \cdot \sin 2\pi}$$
$$= e^{i \cdot 2\pi x}$$

Πρόταση 1.1 (Άσκηση 2.3)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ περιοδική

i) Το $G = \{T \mid T \text{ περίοδος της } f\} \cup \{0\}$ είναι ομάδα με την πράξη της f

ii) Αν επιπλέον η f είναι συνεχής κ μη σταθερή, τότε το G έχει ένα ελάχιστο θετικό στοιχείο T_0 κ $G = \{\kappa T_0 \mid \kappa \in \mathbb{Z}\} = \langle T_0 \rangle$

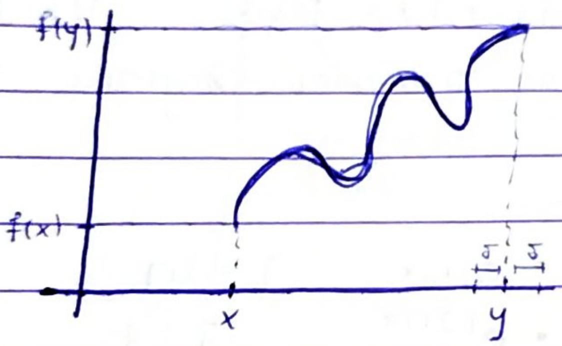
Αποδ:

i) Πρέπει ν.δ.ο. • αν $T_1, T_2 \in G$ τότε $T_1 + T_2 \in G$
κ • αν $T \in G$ τότε $-T \in G$

$$f(x + T_1 + T_2) \underset{T_2 \in G}{=} f(x + T_1) = f(x)$$

$$f(x - T) = f(x - T + T) = f(x)$$

ii) f μη σταθερή $\Rightarrow \exists\, x, y,\ x < y : f(x) \neq f(y)$



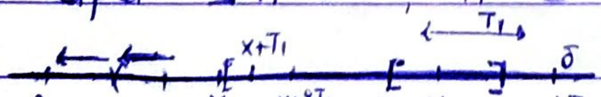
Έστω ότι $\inf\{T > 0 \mid T \in G\} = 0$
(θέλω να καταλήξω σε άτοπο)

Θεωρώ $\varepsilon = \dfrac{|f(x) - f(y)|}{2} > 0$

δηλ. $f(x) \notin (f(y) - \varepsilon, f(y) + \varepsilon)$ (1)

f συνεχής $\Rightarrow \exists\, \delta > 0 : |f(y) - f(t)| < \varepsilon$ (2)
για $t \in (y - \delta, y + \delta)$

άρα $\exists\, T_1 > 0,\ T_1 \in G : T_1 < \delta$



$[x, T_1),\ [x + T_1, 2T_1),\ \ldots$

$\exists\, \kappa \in \mathbb{Z} : y \in [x + \kappa T_1 , x + (\kappa+1) T_1)$

ισχύει : $x + (\kappa+1) T_1 < y + \delta$

κ. $y - \delta < x + \kappa T_1$ $\Bigg\} \Rightarrow x + \kappa T_1 \in (y-\delta , y+\delta)$

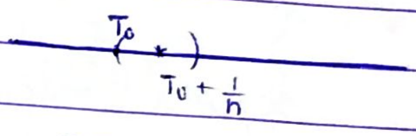
$\kappa = \left[\frac{y-x}{T_1} \right]$ (ακέραιο μέρος)

Από (2) $\Rightarrow \underset{f(x)}{\overset{\shortparallel}{f(x+\kappa T_1)}} \in \underbrace{(f(y) - \varepsilon , f(y) + \varepsilon)}_{\in B(f(y),\, \varepsilon)}$ (λόγω της (1))

ΑΤΟΠΟ

άρα $T_0 = \inf\{T > 0 \mid T \in G\} > 0$

Γιατί το T_0 ανήκει στο σύνολο ?



$\forall n \ \exists T_n \in G : T_0 \le T_n \le T_0 + \frac{1}{n}$

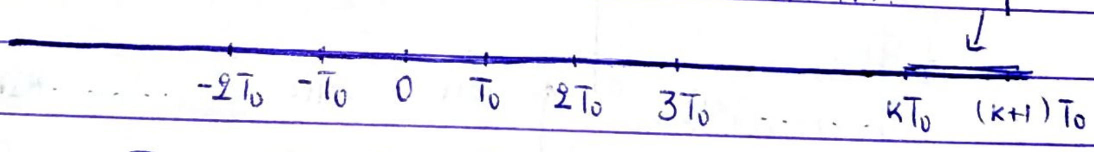
Από τον ορισμό του inf έχουμε ότι:

$\exists \{T_n\} \subseteq G : T_n \to T_0$

Άρα : $f(x) = f(x + T_n) \longrightarrow f(x + T_0)$

$\Rightarrow f(x) = f(x + T_0)$

Μένει ν.δ.ο. η $G = \{\kappa T_0 \mid \kappa \in \mathbb{Z}\}$ είναι κυκλική.



Έστω T με $\kappa T_0 < T < (\kappa+1) T_0$

Τότε $0 < T - \kappa T_0$ είναι περίοδος

κ. $T - \kappa T_0 < T_0$ $\quad (T < (\kappa+1) T_0)$

ΑΤΟΠΟ

<u>Αντιπαράδ.</u> : $f(x) = \begin{cases} 1 , & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0 , & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

τότε $G = \mathbb{Q}$, δεν έχουμε T_0

<u>Παρατήρηση</u>: $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ περιοδική, T περίοδος

$F(x) = f\left(\frac{T}{2\pi} \cdot x\right)$ έχει περίοδο 2π μονάδες

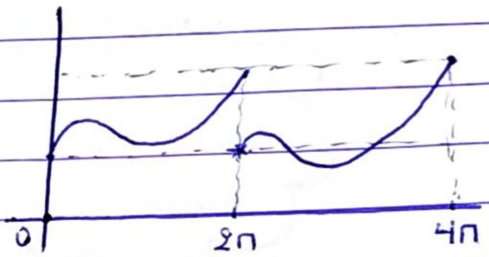
$$F(x+2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi} \cdot (x+2\pi)\right) = f\left(\frac{T}{2\pi} \cdot x + T\right) =$$

$$= f\left(\frac{T}{2\pi}\right) = F(x)$$

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ}}$ 2-6 : (Περιοδική επέκταση)

$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$

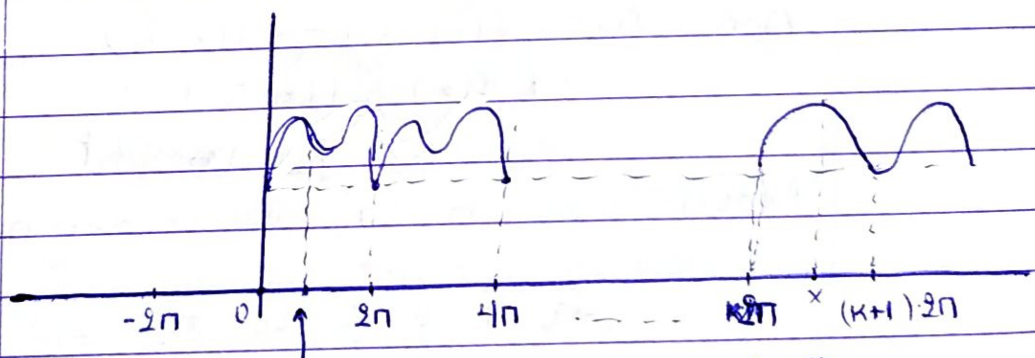
Μπορώ να την ορίσω σε όλο το $\mathbb{C}$ κ. να είναι περιοδική ?



Για να έχουμε $T = 2\pi$ περίοδο, πρέπει

$f(0) = f(2\pi)$

Έστω ότι $f(0) = f(2\pi)$



$x - \left[\frac{x}{2\pi}\right] \cdot 2\pi$ $\qquad$ $\kappa = \left[\frac{x}{2\pi}\right]$

$f(x) = f\left(x - \left[\frac{x}{2\pi}\right] \cdot 2\pi\right)$ $x \in \mathbb{R}$ είναι η <u>περιοδική επέκταση</u> της f

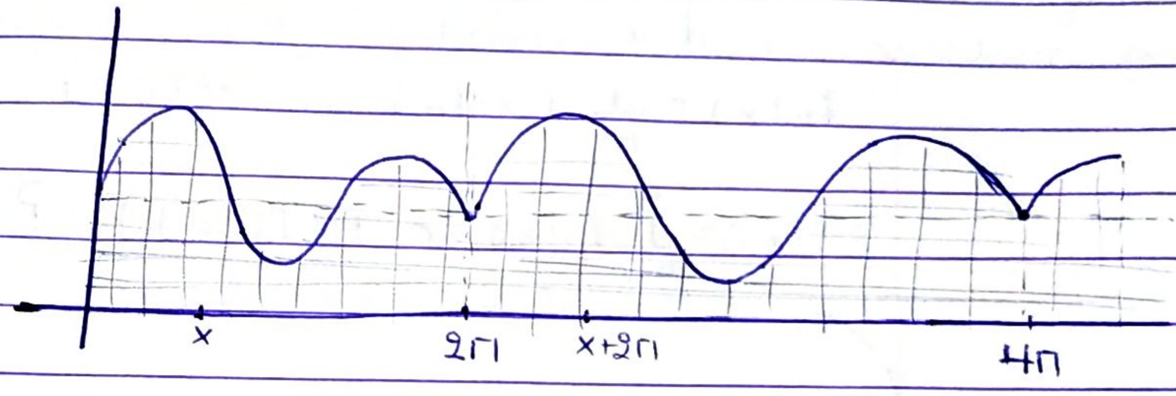
2.5 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ περιοδική $T=2\pi$, $f\in R([0,2\pi])$

$$\int_x^{x+2\pi} f(t)\,dt = \int_y^{y+2\pi} f(t)\,dt \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

$f(t)=u(t)+i\,v(t)$, $\int f(t) = \int u(t)\,dt + i\cdot\int v(t)\,dt$

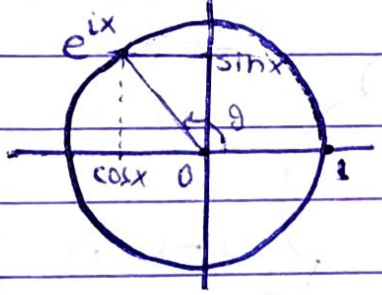
Σκιαγράφηση αποδ.:

Α.ν.δ.ο. $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \int_x^{x+2\pi} f(t)\,dt \quad \forall x$



$L(f,P)$ $x\in P$

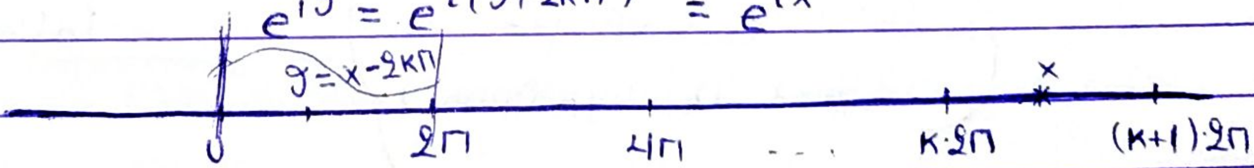
Παρατήρηση: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ 2π-περιοδική



$$\mathbb{T} = \{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\} = \{e^{ix} \mid x\in\mathbb{R}\}$$

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

$$e^{i\theta} = e^{i(\theta+2\kappa\pi)} = e^{ix}$$



$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-περιοδική $\longleftrightarrow$ $F(e^{ix})=f(x)$

$F:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$

$R(\Pi) = \{ f$ 2π-περιοδικές κ. Riemann ολοκλ. $\}$
$\tilde{R}(\Pi) = \{$ —— " —— γενικευμ. R-ολοκλ. $\}$
$C(\Pi) = \{$ —— " —— f συνεχής $\}$

Λύση HW 1 από προηγούμενο:

$0 < r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots < 1$, $\quad r_n \to 1$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2} \cdot f(x - r_n), \quad x \in [0,1]$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \in R([0,1]) \; ?$$

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n^2} \cdot |f(x-r_n)| \leq \frac{1}{n^2}$$

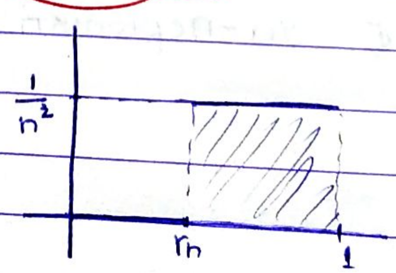
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \overset{=\pi^2/6}{<} \infty$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \xrightarrow{\text{ομοιόμ.}} F(x)$$

Πρέπει ν.α.ο. καθε ένας όρος είναι R. ολοκλ. (από Θεώρημα Ολοκλ. ομοιόμ. ορίου). $\iff$ Α.ν.δ.ο.

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq r_n \\ \frac{1}{n^2}, & r_n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

R.-ολοκλ.



η οποία είναι ούτως (δες προηγ. διάλεξη)